

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений



УТВЕРЖДАЮ  
проректор

*П.А. Машаров*

П.А. Машаров

« 29 » марта 2024 г.

МП

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### ГЕОМЕТРИЯ МАСС

Укрупненная группа направлений  
подготовки  
Программа высшего образования  
Направление подготовки  
Магистерская программа  
Квалификация  
Форма обучения

01.00.00 Математика и механика  
Программа магистратуры  
01.04.01 Математика  
Математика  
Магистр  
Очная

Рабочая программа адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2024

Рабочая программа дисциплины «Геометрия масс» для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика (Магистерская программа: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2024 года.

Разработчик:  
профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
д-р физ.-мат. наук, доцент



В.П. Заставный

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.  
Протокол от 26.03.2024 г. № 10.

Заведующий кафедрой



В.В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
28.03.2024 г.



И.А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 27.03.2024 г. № 3.  
Председатель



Л. И. Селякова

Руководитель основной профессиональной  
образовательной программы,  
д-р физ.-мат. наук, зав. каф. МАиДУ, проф.  
26.03.2024 г.



В.В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:  
базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы;  
дисциплины программы бакалавриата: Алгебра, Аналитическая геометрия, Математический анализ, Теория меры и интеграла, Теоретическая механика.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная),  
Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы	01.04.01 Математика (Магистерская программа: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ОД.3 Геометрия масс
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор вуза
Количество зачетных единиц / всего часов	4 / 144

### Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	2	3	17	–	34	93	144	экзамен
Очная, всего								

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Фундаментальная подготовка в области геометрии масс; овладение методами решения основных типов задач по геометрии масс; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях; формирование у студентов научного подхода при решении теоретических и прикладных задач.

## 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Компетенции

ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях основного общего, среднего общего образования

### 4.2. Индикаторы компетенций

ПК-2.2. Способен проводить занятия для обучающихся разного уровня

### 4.3. Результаты обучения

ПК-2.2.1. Знает особенности каждого возрастного периода детей для осуществления обучения, воспитания и развития в образовательных учреждениях общего и дополнительного образования.

ПК-2.2.2. Знает методы обучения, воспитания и развития с учетом социальных, возрастных, психофизических и индивидуальных особенностей, в том числе особых образовательных потребностей обучающихся.

ПК-2.2.3. Умеет организовать образовательный и воспитательный процессы, учитывая возрастные, социальные и психофизические особенности обучающихся.

## 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Центр масс в случае конечной системы материальных точек	1.1. Определение центра масс в случае конечной системы материальных точек. Основные теоремы: теорема о существовании и единственности, теорема о центре масс двух материальных точек, теорема о группировке. Координаты центра масс. 1.2. Барицентрические координаты на плоскости. 1.3. Барицентрические координаты как площади. 1.4. Теоремы Чевы и Менелая. 1.5. Момент инерции относительно точки в случае конечной системы материальных точек. Теоремы Якоби и Лагранжа.
Раздел 2. Центр масс в общем случае	2.1 Интеграл и масса. 2.2 Определение центра масс в общем случае. Случай нулевой массы. 2.3 Теоремы Гюльдена. 2.4. Центр масс усеченного конического тела.
Раздел 3. Момент инерции	3.1 Момент инерции относительно множества в дискретном и в общем случаях. 3.2 Момент инерции относительно точки. Теорема Лагранжа в общем случае. 3.3 Теорема о моментах инерции относительно параллельных плоских множеств. Теорема Гюйгенса-Штейнера. 3.4 Центробежный и сопряженный моменты инерции. Момент инерции относительно прямой. Оператор инерции.
Раздел 4. Поверхность инерции	3.1 Поверхность инерции. Гиационная поверхность инерции. Случай неотрицательной плотности. Примеры пустых поверхностей инерции. Поверхности инерции, полученные параллельным переносом. Критерий существования точек, в которых поверхность инерции является сферой или пустым множеством. 3.2 Построение поверхности инерции по известной центральной поверхности инерции. Теорема Бине.

## 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 3

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Центр масс в случае конечной системы материальных точек	6		15	30	51
Раздел 2. Центр масс в общем случае*	5		12	24	41
Раздел 3. Момент инерции*	5		9	24	38
Раздел 4. Поверхность инерции*	2		0	12	14

ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	18	–	36	90	144
--------------------------	----	---	----	----	-----

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

1. Определение центра масс в случае конечной системы материальных точек. Основные теоремы: теорема о существовании и единственности, теорема о центре масс двух материальных точек, теорема о группировке. Координаты центра масс.
2. Барицентрические координаты на плоскости.
3. Барицентрические координаты как площади.
4. Теоремы Чебы и Менелая.
5. Момент инерции относительно точки в случае конечной системы материальных точек. Теоремы Якоби и Лагранжа.
6. Интеграл и масса.
7. Определение центра масс в общем случае. Случай нулевой массы.
8. Теоремы Гюльдена.
9. Центр масс усеченного конического тела.
10. Момент инерции относительно множества в дискретном и в общем случаях.
11. Момент инерции относительно точки. Теорема Лагранжа в общем случае.
12. Теорема о моментах инерции относительно параллельных плоских множеств. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

### 7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике и темам:

- определение центра масс в случае конечной системы материальных точек;
- барицентрические координаты как площади;
- теоремы Чебы и Менелая;
- теоремы Гюльдена.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

### 7.3. Образец содержания экзаменационного билета

1. Из четырёх точек  $A, B, C, D$  никакие три не лежат на одной прямой;  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AB$  и  $CD$ ;  $K$  – середина отрезка  $MN$ ;  $P$  – точка пересечения медиан треугольника  $BCD$ . Докажите, что точки  $A, K, P$  принадлежат одной прямой.
2. На боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $BAC$  выбраны такие точки  $P$  и  $Q$ , что  $|BP| = n|PA|$ ,  $|AQ| = n|QC|$ . В каком отношении прямая  $PQ$  делит высоту  $AM$ ?
3. Окружность, вписанная в треугольник  $PQR$ , касается сторон  $QR, RP, PQ$  соответственно в точках  $L, M, N$ . Докажите, что три отрезка  $PL, QM, RN$  имеют общую точку.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже. Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кого набранные баллы не устраивают, сдают экзамен. Максимальное количество баллов за экзамен – 100. Оценка за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на экзамене и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 3

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	15
	Самостоятельная работа	15
	Контрольные работы по практике	35
	Контрольная работа по теоретическому материалу	35
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

### Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
  - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа;
  - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
  - экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

- 3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
- лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - письменные задания выполняются на компьютере;
  - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - в печатной форме увеличенным шрифтом;
  - в форме электронного документа;
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.
- 3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 11. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 11.1. Основная литература

1. Заставный, В. П. Геометрия масс: учебное пособие / В. П. Заставный - 2-е изд., изм. и доп. - Донецк: ДонНУ, 2021. — 111 с. [http://library.donnu.ru/el/ed/3912\\_HM6O.pdf](http://library.donnu.ru/el/ed/3912_HM6O.pdf)

2. Машаров П.А. Интегралы по различным геометрическим фигурам [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / П.А. Машаров – Донецк: ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл).

#### 11.2. Дополнительная литература

3. Павлов А. Л. Избранные разделы математики: алгебра и геометрия: учебное пособие [Электронный ресурс] / А. Л. Павлов. – Донецк : ДонНУ, 2016. – Электронные данные (1 файл).
4. Лурье, М. В. Геометрия : Техника решения задач / М. В. Лурье. - 2-е изд. - М.: Учеб.-науч. центр довуз. образования : Физматлит, 2002. - 240 с.
5. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987.  
[https://math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant-15/Kv61-87\\_Geometriya\\_Mass\\_M.B.Balk.djvu](https://math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant-15/Kv61-87_Geometriya_Mass_M.B.Balk.djvu)
6. Горп, Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горп, А. В. Мазнев ; Донецкий нац. ун-т ; Ин-т прикладной математики и механики НАН. - Донецк : ДонНУ, 2010. - 364 с.
7. Гашков, С.Б. Центры тяжести и геометрия / С.Б. Гашков. – М.: МЦНМО, – 2015. – 64 с.  
<https://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.40.pdf>
8. Эвнин, А.Ю. Метод масс в задачах / А.Ю. Эвнин // Математическое образование – 2015. выпуск 1(73). – с. 27—47.  
[http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=15&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=15&option_lang=rus)

## 12. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»: сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/>. – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://biblio-online.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный.



### 13. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).